Systemes d’equations lineaires

Sommaire

1. Introduction
   1. Notation
   2. Operations elementaries
   3. Methodes de resolution
2. Methodes directes
   1. Le pivotage
   2. Elimination de Gauss
   3. Decomposition LU
      1. Decomposition de choleski
      2. Decomposition de Crout’s
      3. Decompostion de Doolittle’s
   4. Elimination de Gauss-Jordan
3. Methodes iteratives ou indirectes
   1. Methode de Gauss–Seidel
   2. Methode de Gauss-Jordan
4. Methodes projectives
5. Exemple d’application avec matlab

Prerequis:

* Connaissances sur les matrices
* Transformations lineaires
* Transpose et inverse de matrice

1. Introduction

En mathématiques et particulièrement en algèbre linéaire, un système d'équations linéaires est un ensemble constitué d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

La résolution d'un système d'équations linéaires consiste à déterminer les coordonnées du ou des points de rencontre entre les droites décrites par les équations.

Le problème de la résolution d'un linéaire système se pose dans presque tous les domaines de l'ingénierie et de la science, y compris la structure des matériaux, la statique et la dynamique, la conception et analyse de circuits, physique quantique.

Dans ce qui va suivre, nous presenterons les differentes approches pour trouver la solution a un système d’equations lineaires. Celles que nous presenterons sont les methodes directes, indirectes ou iteratives et enfin les methodes projectives.

Par ailleurs puisse que nous faisons face en general a un système ayant un meme nombre d’equations et d’inconnues , nous nous limiterons a ce type de système.

* 1. Notations

Une equation lineaire de n inconnues , , . . . , est une equation de la forme

Ou sont des reels. , , . . . , est une famille d’equations

(1.1)

On souhaiterait determiner si un tel système possede une solution , c’est-a-dire trouver s’il existe des reels , , . . . , qui satisfont chaque equation simultanement.

On dit qu’un système d’equations lineaires est consistant s’il possede une solution autrement le système est dit inconsistent.

Un sytemes de n equations lineaires a n inconnues.

Le système (1.1) peut se reecrire comme suit :

(1.2)

Ou encore AX=b avec :

A = , X = , b =

La matrice augmentee correspondante a notre système est

A titre d’exemple , le système

Sa matrice augmentee est :

* 1. Operations elementaires

Les operations que nous pouvons effectuer sur les lignes de la matrice augmentee sans changer la solution du système sont les suivantes :

1. Permutation de ligne
2. Multiplication d’une ligne par un scalaire
3. Ajouter plusieurs fois une ligne a une autre
   1. Methode de resolution

Plusieurs approches ont etes developpes pour resoudre les systemes d’equations lineaires, les techniques les plus courantes sont :

* Les methodes directes :
  + Elimination de Gauss
  + Decomposition LU
    - Decomposition de choleski
    - Decomposition de Crout’s
    - Decompostion de Doolittle’s
  + Elimination de Gauss-Jordan
* Les methodes iteratives :
* methode de Gauss-seidel
* Methode de Gauss-Jordan
* Les methodes projectives

Dans ce qui suit nous presentons ces dernieres.

1. Methodes directes
   1. Le pivotage
   2. Elimination de Gauss

L’elimition de Gauss applique les operations citees plus hauts sur la matrice augmentee jusqu’à ce que la matrice soit reduite sous forme triangulaire supperieure.

Definition

Une matrice dont les elements sont tels que suit :