Systèmes d’équations linéaires

Sommaire

1. Introduction
   1. Notation
   2. Operations élémentaires
   3. Méthodes de résolution
2. Méthodes directes
   1. Elimination de Gauss
      1. Principe de la méthode
      2. Le problème du pivotage
   2. Décomposition LU
      1. Décomposition de choleski
      2. Décomposition de Crout’s
      3. Décomposition de Doolittle’s
   3. Elimination de Gauss-Jordan
3. Méthodes itératives ou indirectes
   1. Méthode de Gauss–Seidel
   2. Méthode de Gauss-Jordan
4. Méthodes projectives
5. Exemple d’application avec Matlab

Prérequis:

* Connaissances sur les matrices
* Transformations linéaires
* Transpose et inverse de matrice

1. Introduction

En mathématiques et particulièrement en algèbre linéaire, un système d'équations linéaires est un ensemble constitué d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

La résolution d'un système d'équations linéaires consiste à déterminer les coordonnées du ou des points de rencontre entre les droites décrites par les équations.

Le problème de la résolution d'un linéaire système se pose dans presque tous les domaines de l'ingénierie et de la science, y compris la structure des matériaux, la statique et la dynamique, la conception et analyse de circuits, physique quantique.

Dans ce qui va suivre, nous présenterons les différentes approches pour trouver la solution à un système d’équations linéaires. Celles que nous présenterons sont les méthodes directes, indirectes ou itératives et enfin les méthodes projectives.

Par ailleurs puisse que nous faisons face en général a un système ayant un même nombre d’équations et d’inconnues , nous nous limiterons a ce type de système.

* 1. Notations

Une équation linéaire de n inconnues , , . . . , est une équation de la forme

Ou sont des réels. , , . . . , est une famille d’équations

(1.1)

On souhaiterait déterminer si un tel système possède une solution , c’est-à-dire trouver s’il existe des réels , , . . . , qui satisfont chaque equation simultanement.

On dit qu’un système d’équations linéaires est consistant s’il possède une solution autrement le système est dit inconsistant.

Un systèmes de n équations linéaires a n inconnues.

Le système (1.1) peut se réécrire comme suit :

(1.2)

Ou encore AX=b avec :

A = , X = , b =

La matrice augmentée correspondante a notre système est

(1.3)

A titre d’exemple , le système

Sa matrice augmentée est :

* 1. Operations élémentaires

Les opérations que nous pouvons effectuer sur les lignes de la matrice augmentée sans changer la solution du système sont les suivantes :

1. Permutation de ligne
2. Multiplication d’une ligne par un scalaire
3. Ajouter plusieurs fois une ligne a une autre
   1. Méthode de résolution

Plusieurs approches ont étées développées pour résoudre les systèmes d’équations linéaires, les techniques les plus courantes sont :

* Les méthodes directes :
  + Elimination de Gauss
  + Décomposition LU
    - Décomposition de choleski
    - Décomposition de Crout’s
    - Décomposition de Doolittle’s
  + Elimination de Gauss-Jordan
* Les méthodes itératives :
* méthode de Gauss-Seidel
* Méthode de Gauss-Jordan
* Les méthodes projectives

Dans ce qui suit nous présentons ces dernières.

1. Méthodes directes
   1. Elimination de Gauss
      1. principe de la méthode

L’élimination de Gauss applique les opérations citées plus hauts sur la matrice augmentée jusqu’à ce que la matrice soit réduite sous forme triangulaire supérieure.

Définition

Une matrice dont les éléments sont tels que suit :

Est appelée matrice triangulaire supérieure

Partant d’une matrice et en appliquant les opérations sur les lignes de la matrice

cherche à la réduire sous forme triangulaire supérieure

qui est plus facile qui peut être alors résolue par une substitution en arrière.

Soit le système de n équations linéaires a n inconnues représente par la matrice augmentée (1.3)

Il y deux étapes dans la méthode de Gauss : l’élimination des inconnues et la substitution en arrière

Étape 1: les inconnues sont éliminées pour obtenir une matrice triangulaire supérieure.

Pour éliminer de la seconde ligne , on multiplie la première par et on l’additionne a la seconde c’est-à-dire : et nous obtenons

Qui peut être réécrite comme :

Ou

En procédant la même façon pour éliminer dans les autres équations , nous obtenons la matrice augmentée suivante

(1.4)

Par la suite on élimine dans les dernières lignes de (1.4)

Il est important de souligner que la méthode ci haut ne marche que si notre élément pivot . Nous parlerons plus tard du problème du choix du pivot.

Maintenant pour éliminer de la 3 ligne , on multiplie la seconde par et on l’additionne a la troisième c’est-à-dire : et ainsi de suite pour les autres lignes. Nous obtenons finalement la matrice augmentée suivante :

Les «doubles cotes indiquent que l’élément a changé deux fois».

Il est facile de constater que nous pouvons continuer cette procédure pour éliminer des dernières équations puis et ainsi de suite. Finalement nous obtiendrons la réduction en matrice triangulaire supérieure de (1.3) en

(1.5)

Ou indique que l’élément a change fois.

Et nous avons terminé avec la première étape.

Etape 2 : la substitution en arrière

Maintenant devons obtenir la solution cherche à partir de (1.5).

A partir de la dernière ligne on obtient

Qui sera substitue dans les premières équations pour obtenir et le processus est répété pour obtenir les autres inconnues.

Nous avons d’abord calculer puis dans cet ordre. C’est la raison pour laquelle cette étape est appelée substitution arrière.

* + 1. Problème du pivotage

2. Méthodes itératives

Dans les méthodes itératives, le système A = b est mis sous la forme . Lorsque la matrice M est inversible,. Remarquer que cette équation est une équation de la forme . Par conséquent, les méthodes itératives sont des méthodes de point fixe. La détermination du point fixe repose sur l’itération de l’équation

en notant le vecteur de composantes . L’algorithme est initialisé par un vecteur arbitraire et s’arrête quand pour un donné. Lorsque la suite converge, ie , on dit que la methode converge. On demontre que la methode de la convergence ne depend pas du choix de et le resultat suivant : la méthode itérative converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice est strictement inferieur a 1, Selon les choix des matrices M et N, on a différentes méthodes itératives. On note D la matrice formée des seuls éléments diagonaux de la matrice formée des si et la matrice formée des si , de sorte que .

2.1 Méthode de Jacobi

Dans la méthode de Jacobi, encore appelée méthode des déplacements simultanés, la matrice du système est décomposée en . La matrice correspond à la diagonale de (et des zéros en dehors de la diagonale) et la matrice est la matrice dans laquelle on a remplacé les éléments de la diagonale par des zéros La matrice est appelée matrice de jacobi. A chaque cas, on calcule

A chaque itération, on effectue multiplications, additions et une division. Pour stocker et les vecteurs et on utilise mémoires. La méthode ne converge pas toujours. On démontre que si est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si est une matrice diagonalement dominante, c’est-à-dire si

alors la méthode de Jacobi converge. Par conséquent, on peut avoir intérêt à réarranger les termes de de façon à mettre sous la forme d’une matrice dont les éléments diagonaux sont les plus grands possibles. On démontre que si est une matrice tridiagonale par blocs, la méthode converge.

2.2 Méthode de Gauss-Seidel

Dans la méthode de Gauss-Seidel, publiée en 1874 par Ludwig Seidel (1821-1896), on choisit ce qui conduit à considérer la relation de récurrence

C’est une amélioration de la méthode de Jacobi dans laquelle les valeurs calculées sont utilisées au fur et à mesure du calcul et non à l’issue d’une itération comme dans la méthode de Jacobi. On améliore ainsi la vitesse de convergence. Considérons un système à trois équations

À la première itération, on calcule à partir du vecteur initial

la valeur

Cette valeur est réintroduite immédiatement dans le calcul de la deuxième composante (ce qui différencie cette méthode de la méthode de Jacobi, car on utilise ici la valeur et non

De même, on porte dans le calcul de

A chaque itération, on effectue multiplications, additions et une division. Pour stocker et les vecteurs , et , on utilise mémoires. Si et sont calculés, on emploie mémoires. La méthode ne converge pas toujours. On démontre que si est une matrice définit positive, la méthode itérative converge.De même, si est une matrice diagonalement dominante, c’est à dire si

alors la méthode de Gauss-Seidel converge.